第1問

x を実数とし

$$F = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$$

とする。

一般に，実数 y に対して

$$(x+y)(x+7-y) = x^2 + 7x + y(7-y)$$

が成り立つから，$x^2 + 7x = X$ とおくと

$$F = (X+6)\left(X + \boxed{1,\ 2}\right)\left(X + \boxed{3,\ 4}\right)$$

と表すことができる。ただし $\boxed{1,\ 2} < \boxed{3,\ 4}$ とする。

（1） $x = \dfrac{\sqrt{285} - 21}{6}$ のとき $X = \dfrac{\boxed{5,\ 6,\ 7}}{\boxed{8}}$ であり，$27F = \boxed{9,\ 10,\ 11,\ 12}$ である。

（2） $p > -\dfrac{245}{4}$ をみたす実数 p に対して，$x = \dfrac{1}{2}\left(-7 + \sqrt{49 + \dfrac{4p}{5}}\right)$ のとき

$$F = \frac{(p+30)\left(p + \boxed{13,\ 14}\right)\left(p + \boxed{15,\ 16}\right)}{\boxed{17}^{3}}$$

である。

第２問

箱の中に黒玉２個と白玉１個の合計３個の玉が入っている。次の試行を繰り返し行う。

（ｉ） 箱の中から同時に２個の玉を取り出す。

（ii） 取り出した２個の玉が同じ色ならばそのまま２個とも箱の中に戻し，異なる色ならば取り出した玉のかわりに白玉２個を箱に入れる。

（iii） 最後に黒玉を１個箱に追加しよくかき混ぜて，１回の試行を終了とする。

（１） この試行を１回行った後，箱の中には合計 $\boxed{18}$ 個の玉が入っている。

（２） この試行を３回行った後，箱の中の黒玉の個数の最大値は $\boxed{19}$ であり，白玉の個数の最大値は $\boxed{20}$ である。

（３） この試行を１回行った後，黒玉の個数が３個である確率は $\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}}$ である。

（４） この試行を２回行った後，白玉の個数が２個である確率は $\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{24,\ 25}}$ である。

（５） この試行を３回行った後の黒玉の個数が４個であるとき，この試行を１回行った後の白玉の個数が２個である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27}}$ である。

第３問

xy 平面上に，定点 A$(0,\ a)$ と放物線 $y = -2x^2 + 3$ 上の動点 P$(t,\ -2t^2 + 3)$ がある。線分 AP の長さを L とすると L は t の関数である。

（１） L^2 を t を用いて表すと

$$L^2 = \boxed{28}\,t^4 - \left(\boxed{29,\ 30} - \boxed{31}\,a\right)t^2 + \left(\boxed{32} - a\right)^2$$

である。

（２） $t^2 = X$ とする。t が実数全体を動くとき，X のとりうる値の範囲は $X \geqq \boxed{33}$ である。
よって L の最小値を $m(a)$ とすると

- $a \geqq \dfrac{\boxed{34,\ 35}}{\boxed{36}}$ のとき　$m(a) = \left|\ \boxed{37} - a\ \right|$
- $a < \dfrac{\boxed{34,\ 35}}{\boxed{36}}$ のとき　$m(a) = \dfrac{\sqrt{\boxed{38,\ 39} - \boxed{40}\,a}}{\boxed{41}}$

である。

第４問

四角形 ABCD において，$AB = 2$，$BC = 3$，$CD = x$，$DA = 5$ であるとする。四角形 ABCD はある円 P に内接している。

三角形 ABC，三角形 ACD にそれぞれ余弦定理を用いることにより，$\cos\angle ABC$ を x を用いて表すと

$$\cos\angle ABC = \frac{-\boxed{42,\ 43} - x^2}{\boxed{44,\ 45} + \boxed{46,\ 47}\,x}$$

である。

（１） $x = 5$ のとき，$AC = \dfrac{\boxed{48,\ 49}}{\sqrt{\boxed{50,\ 51}}}$ である。

また，円周角の定理により $\angle ABD = \angle CBD$ である。AC と BD の交点を E とするとき，方べきの定理から

$$BE \times DE = \frac{\boxed{52,\ 53,\ 54}}{\boxed{50,\ 51}}$$

である。

（２） $x = 6$ のとき

$$AB + CD = BC + DA$$

により，四角形 ABCD はある円 Q に外接している。

四角形 ABCD の面積は $\boxed{55}\sqrt{\boxed{56}}$ であり，

円 Q の半径は $\dfrac{\boxed{57}\sqrt{\boxed{58}}}{\boxed{59}}$ である。