第1問

x を実数とし，

$$P = (x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

とする。

一般に，整数 n に対して

$$(x - n)(x + n + 1) = x^2 + x - n(n + 1)$$

が成り立つから，$x^2 + x = X$ とおくと

$$P = X(X - \boxed{1})(X - \boxed{2})$$

と表せる。ただし $\boxed{1} < \boxed{2}$ とする。

（1） $x = \dfrac{-3-\sqrt{105}}{6}$ のとき $X = \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$ であり，$27P =$ **5, 6, 7, 8** である。

（2） $a > -\dfrac{7}{4}$ をみたす実数 a に対して $x = \dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+\dfrac{4a}{7}}\right)$ のとき

$$P = \frac{a(a-14)(a-\boxed{9, 10})}{\boxed{11}^{3}}$$

である。

第２問

a を $-1 \leqq a \leqq 1$ をみたす実数の定数とする。

x についての２次関数 $f(x) = x^2 - ax - a^2 + a$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{4}$ における最小値を $m(a)$ とする。

（１） $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき，$m(a) = -a^2 + \dfrac{\boxed{12}}{\boxed{13}}a + \dfrac{\boxed{14}}{\boxed{15,\ 16}}$ である。

（２） $m(a)$ は $a = \dfrac{\boxed{17}}{\boxed{18}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{19}}{\boxed{20}}$ をとる。

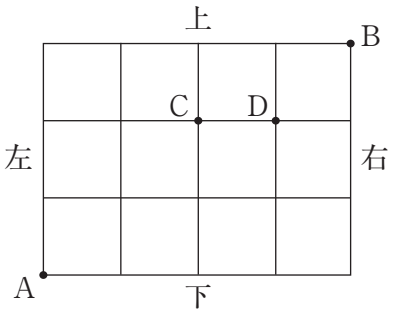
（３） $|m(a)|$ の最大値は $\boxed{21}$ である。

（４） p を $-1 \leqq p \leqq \dfrac{1}{2}$ をみたす実数とする。$p \leqq a \leqq p + \dfrac{1}{2}$ における $|m(a)|$ の最大値が $\dfrac{\boxed{19}}{\boxed{20}}$ となるような p の条件は

$$p = \frac{\boxed{22} - \boxed{23}\sqrt{\boxed{24}}}{\boxed{25,\ 26}} \text{ または } \frac{\boxed{27,\ 28}}{\boxed{29,\ 30}} \leqq p \leqq \frac{\boxed{31}}{\boxed{32}}$$

である。

第３問



図のような格子状の道路および，A，B，C，D の４つの地点がある。

（１） A 地点から B 地点までの最短経路は **33, 34** 通りある。

（２） A 地点から B 地点までの最短経路のうち，C 地点を通らない最短経路は **35, 36** 通りある。

（３） A 地点から B 地点までの最短経路のうち，C 地点，D 地点の少なくとも一方の地点を通る最短経路は **37, 38** 通りある。

（４） A 地点から出発し，サイコロを繰り返し投げ，次の規則にしたがって点 P が進むものとする。

[規則]
- １の目が出たら右に１区画進む。
- ２の目が出たら右に２区画進む。
- ３の目が出たら上に１区画進む。
- ４，５，６の目が出たら動かない。
- 右端で１または２の目が出たとき，あるいは上端で３の目が出たときは動かない。
- 右端の１区画手前で２の目が出たときは，右端まで進んで止まる。

ただし，サイコロのどの目が出るのも同様に確からしいものとする。

① 点 P が A 地点を出発し，サイコロを 6 回投げるとき，5 回目までに C 地点に到達し，6 回目に初めて D 地点に到達する確率は

$$\frac{\boxed{39}}{\boxed{40, 41, 42}}$$

である。

② 点Pが A 地点を出発し，サイコロを 6 回振るとき，6 回目に初めて D 地点に到達する確率は

$$\frac{\boxed{43,\ 44,\ 45}}{\boxed{46,\ 47,\ 48,\ 49}}$$

である。

第４問

特に明記されていない場合，数は10進法で表されているものとする。

（１） 連続する４つの整数の積を５で割ったとき，余りは０または［ 50 ］である。

（２） 正の整数 n に対し［ 51 ］^{n} を５で割ったときの余りは

n が奇数のとき［ 51 ］，　n が偶数のとき［ 52 ］

である。

（３） 整数 a が５と互いに素である整数 b と，正の整数 n によって $a = 5^n \cdot b$ と表されるとする。

① $a = 15!$ のとき，15以下の正の整数の中の５の倍数の個数を考えることにより

$n =$［ 53 ］である。

よって，a を５進法で表すと末尾に０がちょうど［ 53 ］個並ぶ。

さらに，$b = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot 2 \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14) \cdot 3$ であり

$$\begin{cases} c_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ c_2 = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \\ c_3 = 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \end{cases}$$

とすると，（１）から c_1，c_2，c_3 を５で割った余りはいずれも［ 54 ］である。

よって，（２）から $c_1c_2c_3$ を５で割った余りは［ 55 ］であるから，b を５で割った余りは［ 56 ］である。したがって $b = 5k +$［ 56 ］（k は正の整数）と表されるから

$$\begin{aligned} a &= 5^n(5k + \boxed{56}) \\ &= k \cdot 5^{n+1} + \boxed{56} \cdot 5^n \end{aligned}$$

となり，これは a を５進法で表したとき，末尾から $(n + 1)$ 桁目に現れる数字が［ 56 ］であることを表している。

② $a = 27!$ のとき，27以下の正の整数のうち５の倍数が［ 57 ］個，5^2 の倍数が［ 58 ］個あることから $n =$［ 59 ］である。

よって，a を５進法で表すと末尾には０がちょうど［ 59 ］個並び，さらに①と同様に考えると，a を５進法で表したとき，末尾から $(n + 1)$ 桁目に現れる数字は［ 60 ］である。