第１問

N を２以上の整数とする。N 以下の正の整数のうち，N との最大公約数が１であるものの個数を $f(N)$ で表す。例えば，10 以下の正の整数のうち，10 との最大公約数が１であるものは１，３，７，９の４個であるから $f(10) = 4$ である。

（１） 432 を素因数分解すると，$432 = 2^{\boxed{1}} \cdot 3^{\boxed{2}}$ である。

（２） $f\left(2^{\boxed{1}}\right) = \boxed{\ 3\ }$，$f\left(3^{\boxed{2}}\right) = \boxed{4,\ 5}$ である。

（３） $N = 2^a \cdot 3^b$ とする。ただし，a，b は１以上の整数である。
集合 U を N 以下の正の整数全体とし，U の部分集合 P，Q を
$$P = \{k \in U \mid k = 2l,\ l \text{ は整数}\},\quad Q = \{k \in U \mid k = 3m,\ m \text{ は整数}\}$$
と定める。

集合 X に対して，X の要素の個数を $n(X)$ と表すとき

$$n(P)=\frac{N}{\boxed{\ 6\ }},\qquad n(Q)=\frac{N}{\boxed{\ 7\ }}$$

が成り立つ。また，等式

$$n(P\cup Q)=\boxed{\ ア\ },\qquad n(\overline{P}\cap\overline{Q})=\boxed{\ イ\ }$$

が成り立つ。

$\boxed{\ ア\ }$，$\boxed{\ イ\ }$ に当てはまる数式の組み合わせとして適当なものを下の 1 ～ 4 の中から 1 つ選び，$\boxed{\ 8\ }$ へ記入せよ。

1　$\boxed{\ ア\ }$ $n(P)+n(Q)-n(P\cap Q)$，　$\boxed{\ イ\ }$ $n(\overline{P})\times n(\overline{Q})$
2　$\boxed{\ ア\ }$ $n(P)+n(Q)-n(P\cap Q)$，　$\boxed{\ イ\ }$ $n(U)-n(P\cup Q)$
3　$\boxed{\ ア\ }$ $n(P)+n(Q)$，　$\boxed{\ イ\ }$ $n(\overline{P})\times n(\overline{Q})$
4　$\boxed{\ ア\ }$ $n(P)+n(Q)$，　$\boxed{\ イ\ }$ $n(U)-n(P\cup Q)$

$f(N)$ は N 以下の正の整数のうち，2 の倍数でも 3 の倍数でもないものの個数であるから

$$f(N)=N-\left(\frac{N}{\boxed{\ 6\ }}+\frac{N}{\boxed{\ 7\ }}-\frac{N}{\boxed{\ 9\ }}\right)$$

$$=N\left(1-\frac{1}{\boxed{\ 6\ }}\right)\left(1-\frac{1}{\boxed{\ 7\ }}\right)$$

$$=\frac{N}{\boxed{\ 10\ }}$$

が成り立つ。よって $f(432)=\boxed{\ 11,\ 12,\ 13\ }$ である。

（4） $N=2^5\cdot3^2\cdot7$ とする。（3）と同様に考えると

$$\frac{f(N)}{N}=\frac{\boxed{\ 14\ }}{\boxed{\ 15\ }}$$

である。

第２問

$x,\ y$ を実数とし，$F = x^2 + xy + y^2$ とする。

（１） $x,\ y$ は

$$x + 3y = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たしながら変化する。

① により　$x = 1 - 3y$　であるから，F を y を用いて表すと

$$F = \boxed{16}\,y^2 - \boxed{17}\,y + \boxed{18}$$

となる。よって F の最小値は $\dfrac{\boxed{19}}{\boxed{20,\ 21}}$ であり，

このときの $x,\ y$ の値は $x = \dfrac{\boxed{22,\ 23}}{\boxed{24,\ 25}}$，$y = \dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27,\ 28}}$ である。

（２） $x,\ y$ は

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たしながら変化する。

② により y のとり得る値の範囲は

$$\boxed{29} \leqq y \leqq \frac{\boxed{30}}{\boxed{31}}$$

であるから，F の最小値は $\dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}}$，最大値は $\boxed{34}$ である。

第３問

サイコロを３回振って，出た目の数を順に a，b，c とする。

（１） a，b，c が

$$\begin{cases} a \geqq b + c \\ a > b = c \end{cases}$$

を満たすような組（a，b，c）は全部で $\boxed{35}$ 通りある。

（２） a，b，c が

$$\begin{cases} a \geqq b + c \\ a > b > c \end{cases}$$

を満たすような組（a，b，c）は全部で $\boxed{36,\ 37}$ 通りある。

（３） （１），（２）から，a，b，c が

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases}$$

を満たすような組（a，b，c）は全部で $\boxed{38,\ 39,\ 40}$ 通りある。

よって，a，b，c がある三角形の３辺の長さとなる確率は

$$\frac{\boxed{41,\ 42}}{\boxed{43,\ 44}}$$

である。

第４問

△ ABC の辺の長さが AB ＝ 4，BC ＝ 3，CA ＝ 5 であるとする。

（1） 辺 AB 上に点 D を

$$\angle ACD = \angle BCD$$

となるようにとる。このとき

$$AD = \frac{\boxed{45}}{\boxed{46}}$$

である。また，△ BCD の外接円の半径を R とすると

$$R = \frac{\boxed{47}\sqrt{\boxed{48}}}{\boxed{49}}$$

である。

（2） 3 点 A，B，C が定める平面上において，AE ＝ 4，CE ＝ 3 を満たす点 E を，直線 AC に関して B と反対側にとる。

（ i ） 直線 AE と直線 BC の交点を F とする。△ ABF ∽ △ CEF であることから

$$BF = \frac{\boxed{50,\ 51}}{\boxed{52}}$$

である。

さらに，辺 AB 上に点 G を

$$CG \parallel EA$$

となるようにとると

$$CG = \frac{\boxed{53,\ 54}}{\boxed{55}}$$

である。

（ ii ） $BE = \dfrac{\boxed{56,\ 57}}{\boxed{58}}$ である。